अध्याय 15

सांख्यिकी

Statistics

प्रश्नावली 15 .1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 2) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

(प्र. सं. 1 - 2) माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन की गणना सूत्र $\frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$, द्वारा की जाती है। जहाँ, $\bar{x}$ = दिए हुए प्रेक्षणों का माध्य

हल दिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 17}{8} = 10$$

1.

x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
4	$\lvert 4 - 10\rvert = 6$
7	$\lvert 7 - 10\rvert = 3$
8	$\lvert 8 - 10\rvert = 2$
9	$\lvert 9 - 10\rvert = 1$
10	$\lvert 10 - 10\rvert = 0$
12	$\lvert 12 - 10\rvert = 2$
13	$\lvert 13 - 10\rvert = 3$
17	$\lvert 17 - 10\rvert = 7$
$\Sigma x_i = 80$	$\Sigma\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 24$

$\therefore$ माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{24}{8} = 3$

2. दिए गए आँकड़ों का माध्य $\bar{x} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{38 + 70 + 48 + 40 + 42 + 55 + 63 + 46 + 54 + 44}{10} = 50$$

x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
38	$\lvert 38 - 50\rvert = 12$
70	$\lvert 70 - 50\rvert = 20$
48	$\lvert 48 - 50\rvert = 02$
40	$\lvert 40 - 50\rvert = 10$
42	$\lvert 42 - 50\rvert = 08$
55	$\lvert 55 - 50\rvert = 05$
63	$\lvert 63 - 50\rvert = 13$
46	$\lvert 46 - 50\rvert = 04$
54	$\lvert 54 - 50\rvert = 04$
44	$\lvert 44 - 50\rvert = 06$
$\Sigma x_i = 500$	$\Sigma\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 84$

∴ माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{84}{10} = 8.4$

निर्देश (प्र. सं. 3 - 4) **निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।**

प्रश्न 3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

सर्वप्रथम दिए गए प्रेक्षणों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित करते हैं और तब माध्यिका (M_d) ज्ञात करते हैं। इसके बाद माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन की गणना सूत्र $\frac{\Sigma|x - M_d|}{n}$ द्वारा की जाती है। जहाँ, n = पदों की संख्या।

हल (प्र. सं. 3 - 4)

3. दिए गए आँकड़े निम्न हैं, 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित करने पर,

10, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 16, 16, 17, 17, 18

प्रेक्षणों की संख्या = 12 (सम)

$$\text{माध्यिका } M_d = \frac{\frac{N}{2}\text{ वाँ प्रेक्षण} + \left(\frac{N}{2}+1\right)\text{ वाँ प्रेक्षण}}{2} = \frac{\left(\frac{12}{2}\right)\text{वाँ प्रेक्षण} + \left(\frac{12}{2}+1\right)\text{वाँ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{6\text{ वाँ प्रेक्षण} + 7\text{ वाँ प्रेक्षण}}{2} = \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2}$$

$\Rightarrow \quad M_d = 13.5$

x_i	$\lvert x_i - M\rvert$
10	$\lvert 10 - 13.5 \rvert = 3.5$
11	$\lvert 11 - 13.5 \rvert = 2.5$
11	$\lvert 12 - 13.5 \rvert = 2.5$
12	$\lvert 12 - 13.5 \rvert = 1.5$
13	$\lvert 13 - 13.5 \rvert = 0.5$
13	$\lvert 13 - 13.5 \rvert = 0.5$
14	$\lvert 14 - 13.5 \rvert = 0.5$
16	$\lvert 16 - 13.5 \rvert = 2.5$
16	$\lvert 16 - 13.5 \rvert = 2.5$
17	$\lvert 17 - 13.5 \rvert = 3.5$
17	$\lvert 17 - 13.5 \rvert = 3.5$
18	$\lvert 18 - 13.5 \rvert = 4.5$
	$\Sigma\lvert x_i - M\rvert = 28$

∴ माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|x_i - M_d|}{n} \frac{28}{12} = 2.33$

4. दिए गए आँकड़ें निम्न हैं, 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

दिए गए आँकड़ों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित करने पर,

36, 42, 45, 46, 46, 49, 51, 53, 60, 72

प्रेक्षणों की संख्या = 10 (सम)

$$\text{माध्यिका } M_d = \frac{\frac{N}{2} \text{ वाँ प्रेक्षण} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{10}{2}\right) \text{ वाँ प्रेक्षण} + \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{ वाँ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{ वाँ प्रेक्षण} + 6 \text{ वाँ प्रेक्षण}}{2} = \frac{46+49}{2} = 47.5$$

x_i	$\lvert x_i - M \rvert$
36	$\lvert 36 - 47.5 \rvert = 11.5$
42	$\lvert 42 - 47.5 \rvert = 5.5$
45	$\lvert 45 - 47.5 \rvert = 2.5$
46	$\lvert 46 - 47.5 \rvert = 1.5$
46	$\lvert 46 - 47.5 \rvert = 1.5$
49	$\lvert 49 - 47.5 \rvert = 1.5$
51	$\lvert 51 - 47.5 \rvert = 3.5$
53	$\lvert 53 - 47.5 \rvert = 5.5$
60	$\lvert 60 - 47.5 \rvert = 12.5$
72	$\lvert 72 - 47.5 \rvert = 24.5$
	$\Sigma \lvert x_i - M \rvert = 70$

$\therefore$ माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{\Sigma \lvert x_i - M_d \rvert}{n} = \frac{70}{10} = 7$

निर्देश (प्र. सं. 5 - 6) **निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।**

माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम सूत्र $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ द्वारा माध्य ज्ञात करते हैं और तब माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना, सूत्र $\frac{\Sigma(f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert)}{\Sigma f_i}$ द्वारा की जाती है

प्रश्न 5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

हल (प्र. सं. 5 - 6)

5.

x_i	f_i	f_ix_i	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
5	7	35	$\|5-14\|=9$	63
10	4	40	$\|10-14\|=4$	16
15	6	90	$\|15-14\|=1$	06
20	3	60	$\|20-14\|=6$	18
25	5	125	$\|25-14\|=11$	55
	$\Sigma f_i = 25$	$\Sigma f_ix_i = 350$		$\Sigma f_i\|x_i - \bar{x}\| = 158$

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{350}{25} = 14$$

$$\therefore \text{ माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन } = \frac{\Sigma f_i|x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} = \frac{158}{25} = 6.32$$

6.

x_i	f_i	f_ix_i	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
10	4	40	$\|10-50\|=40$	160
30	24	720	$\|30-50\|=20$	480
50	28	1400	$\|50-50\|=00$	000
70	16	1120	$\|70-50\|=20$	320
90	8	720	$\|90-50\|=40$	320
	$\Sigma f_i = 80$	$\Sigma f_ix_i = 4000$		$\Sigma f_i\|x_i - \bar{x}\| = 1280$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{4000}{80} = 50$$

$$\therefore \text{ माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i|x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} \frac{1280}{80} = 16$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 8) **निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।**

प्रश्न 7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए, सर्वप्रथम हम माध्यिका ज्ञात करते हैं और तब माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना, सूत्र $\frac{\Sigma f_i(x_i - M_d)}{\Sigma f_i}$ द्वारा की जाती है।

हल (प्र.सं. 7 - 8)

7.

x_i	f_i	CF	$\|x_i - M\|$	$f_i\|x_i - M_d\|$
5	8	8	$\|5-7\|=2$	16
7	6	14	$\|7-7\|=0$	00
9	2	16	$\|9-7\|=2$	04
10	2	18	$\|10-7\|=3$	06
12	2	20	$\|12-7\|=5$	10
15	6	26	$\|15-7\|=8$	48
	$\Sigma f_i = 26$			$\Sigma f_i\|x_i - M_d\| = 84$

यहाँ, $N = \Sigma f_i = 26$ (सम)

$$\text{माध्यिका } M_d = \frac{\frac{N}{2}\text{ वाँ प्रेक्षण } + \left(\frac{N}{2}+1\right)\text{वाँ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{\frac{26}{2}\text{ वाँ प्रेक्षण } + \left(\frac{26}{2}+1\right)\text{ वाँ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{13\text{वाँ प्रेक्षण } + 14\text{वाँ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$\therefore$ माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f_i|x_i - M_d|}{\Sigma f_i} = \frac{84}{26} = 3.23$

8.

x_i	f_i	CF	$\|x_i - M\|$	$f_i\|x_i - M_d\|$
15	3	3	$\|15-30\|=15$	45
21	5	8	$\|21-30\|=9$	45
27	6	14	$\|27-30\|=3$	18
30	7	21	$\|30-30\|=0$	0
35	8	29	$\|35-30\|=5$	40
	$\Sigma f_i = 29$			$\Sigma f_i\|x_i - M_d\| = 148$

यहाँ, $N = \Sigma f_i = 29$ (विषम)

$\therefore$ माध्यिका $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$वाँ प्रेक्षण $= \left(\frac{29+1}{2}\right)$वाँ मान = 15वाँ

$\Rightarrow$ $M = 30$

$\therefore$ माध्यिका के सापेक्ष माध्य माध्य माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f_i|x_i - M_d|}{\Sigma f_i} = \frac{148}{29} = 5.1$

निर्देश (प्र. सं. 9 - 10) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9.

आय प्रतिदिन	व्यक्तियों की संख्या
0-100	4
100-200	8
200-300	9
300-400	10
400-500	7
500-600	5
600-700	4
700-800	3

10.

ऊँचाई (सेमी में)	लड़कों की संख्या
95-105	9
105-115	13
115-125	26
125-135	30
135-145	12
145-155	10

हल (प्र.सं 9 - 10)

9.

वर्ग	f_i	मध्य-मान (x_i)	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$ $A = 350, h = 100$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0-100	4	50	−3	−12	308	1232
100-200	8	150	−2	−16	208	1664
200-300	9	250	−1	−9	108	972
300-400	10	350	0	0	8	80
400-500	7	450	1	7	92	644
500-600	5	550	2	10	192	960
600-700	4	650	3	12	292	1168
700-800	3	750	4	12	392	1176
	$\Sigma f_i = 50$			$\Sigma f d_i = 4$		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 7896$

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_i}{\Sigma f_i} \times h = 350 + \frac{4}{50} \times 100 = 350 + 8$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 358$$

$$\therefore \text{ माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\Sigma f_i} = \frac{7896}{50} = 157.92$$

10. वर्ग	f_i	मध्य-मान (x_i)	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$ $A = 130, h = 10$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
95-105	9	100	–3	–27	25.3	227.7
105-115	13	110	–2	–26	15.3	198.9
115-125	26	120	–1	–26	5.3	137.8
125-135	30	130	0	0	4.7	141.0
135-145	12	140	1	12	14.7	176.4
145-155	10	150	2	20	24.7	247.0
कुल	Σf_i = 100			$\Sigma f d_i$ = –47		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ = 1128.8

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_i}{\Sigma f_i} \times h = 130 + \frac{(-47)}{100} \times 10$$

$$= 130 - 4.7$$

$$= 125.3$$

$$\text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\Sigma f_i} = \frac{1128.8}{100} = 11.288$$

प्रश्न 11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
लड़कियों की संख्या	6	8	14	16	4	2

हमें माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करनी है। इसलिए सर्वप्रथम हम माध्यिका निकालेंगे। दिय गए आँकड़े सतत् हैं अतः माध्यिका की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है।

$$\text{अर्थात् माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

हल

वर्ग	f_i	CF	मध्य-मान x_i	$\lvert x_i - M_d \rvert$	$f_i \lvert x_i - M_d \rvert$
0-10	6	6	5	$\lvert 5 - 27.86 \rvert = 22.86$	137.16
10-20	8	(14)C	15	$\lvert 15 - 27.86 \rvert = 12.86$	102.88
(20-30)	(14)	28	25	$\lvert 25 - 27.86 \rvert = 2.86$	40.04
30-40	16	44	35	$\lvert 35 - 27.86 \rvert = 7.14$	114.24
40-50	4	48	45	$\lvert 45 - 27.86 \rvert = 17.14$	68.56
50-60	2	50	55	$\lvert 55 - 27.86 \rvert = 27.14$	54.28
	$\Sigma f_i = 50$				$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ = 517.16

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$\Rightarrow$ $C = 14, f = 14, l = 20, h = 10$

$$\text{माध्यिका}, M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h = 20 + \frac{25 - 14}{14} \times 10 = 20 + \frac{11 \times 10}{14}$$

$$= 20 + 7.86 = 27.86$$

$\therefore$ माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f_i |x_i - M_d|}{\Sigma f_i} = \frac{517.16}{50} = 10.34$

प्रश्न 12. नीचे दिए गए 100 व्यक्तियों की आयु के बंटन के लिए माध्यिका सापेक्ष माध्य विचलन की गणना कीजिए।

आयु	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
सख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

सर्वप्रथम एकसमान लंबाई का वर्ग अंतराल बनाते हैं और तब निम्न सूत्र, द्वारा माध्यिका ज्ञात करते हैं $M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$

हल

वर्ग	f_i	CF	मध्य-मान x_i	$\|x_i - M_d\|$	$f_i\|x_i - M_d\|$
15.5-20.5	5	5	18	$\|18 - 38\| = 20$	100
20.5-25.5	6	11	23	$\|23 - 38\| = 15$	90
25.5-30.5	12	23	28	$\|28 - 38\| = 10$	120
30.5-35.5	14	37	33	$\|33 - 38\| = 5$	70
35.5-40.5	26	63	38	$\|38 - 38\| = 0$	0
40.5-45.5	12	75	43	$\|43 - 38\| = 5$	60
45.5-50.5	16	91	48	$\|48 - 38\| = 10$	160
50.5-55.5	9	100	53	$\|53 - 38\| = 15$	135
	$\Sigma f_i =$ 100				$\Sigma f_i \| xi - \bar{x} \| =$ 735

यहाँ, $N = 100$

$\therefore$ $\frac{N}{2} = 50$

$\therefore$ माध्यिका वर्ग 35.5 - 40.5 है।

$\Rightarrow$ $l = 35.5, C = 37, f = 26, h = 5$

अब, $M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$

$$\therefore \quad M_d = 35.5 + \frac{50-37}{26} \times 5 = 35.5 + \frac{13}{26} \times 5$$

$$= 35.5 + 2.5 = 38$$

$\therefore$ ~~माध्यिका के सापेक्ष माध्य माध्य माध्य विचलन~~ $= \frac{\Sigma f_i |x_i - M_d|}{\Sigma f_i} = \frac{735}{100} = 7.35$

प्रश्नावली 15.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ

3. तीन के प्रथम 10 गुणज

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

माध्य तथा प्रसरण की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है।

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma x_i}{n}, \text{प्रसरण} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$$

हल (प्र.सं.1 - 5)

1.

x_i	x_i^2
6	36
7	49
10	100
12	144
13	169
4	16
8	64
12	144
$\Sigma x_i = 72$	$\Sigma x_i^2 = 722$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{72}{8} = 9$$

तथा $\quad \text{प्रसरण} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = \frac{722}{8} - \left(\frac{72}{8}\right)^2 = 90.25 - 81 = 9.25$

2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ निम्न हैं, 1, 2, 3, 4, ..., n

x_i	x_i^2
1	1^2
2	2^2
3	3^2
4	4^2
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
n	n^2
$\Sigma x_i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\Sigma x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore \quad \text{माध्य} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

तथा $$\text{प्रसरण} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left[\frac{n(n+1)}{2n}\right]^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. 3 के प्रथम 10 गुणज निम्न हैं 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

x_i	x_i^2
3	9
6	36
9	81
12	144
15	225
18	324
21	441
24	576
27	729
30	900
$\Sigma x_i = 165$	$\Sigma x_i^2 = 3465$

माध्य $x_i = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{165}{10} = 16.5$

तथा प्रसरण $= \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = \frac{3465}{10} - \left(\frac{165}{10}\right)^2$

$= 346.5 - (16.5)^2 = 346.5 - 272.25 = 74.25$

4.

x_i	f_i	x_i^2	f_ix_i	$f_ix_i^2$
6	2	36	12	72
10	4	100	40	400
14	7	196	98	1372
18	12	324	216	3888
24	8	576	192	4608
28	4	784	112	3136
30	3	900	90	2700
$\Sigma x_i = 130$	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_ix_i = 760$	$\Sigma f_ix_i^2 = 16176$

माध्य $= \frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \frac{760}{40} = 19$

तथा प्रसरण $= \frac{\Sigma f_ix_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i}\right)^2 = \frac{16176}{40} - \left(\frac{760}{40}\right)^2$

$= 404.4 - (19)^2 = 404.4 - 361 = 43.4$

5.

x_i	f_i	x_i^2	f_ix_i	$f_ix_i^2$
92	3	8464	276	25392
93	2	8649	186	17298
97	3	9409	291	28227
98	2	9604	196	19208
102	6	10404	612	62424
104	3	10816	312	32448
109	3	11881	327	35643
	$\Sigma f_i = 22$		$\Sigma f_ix_i = 2200$	$\Sigma f_ix_i^2 = 220640$

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \frac{2200}{22} = 100$

तथा प्रसरण $= \frac{\Sigma f_ix_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i}\right)^2 = \frac{220640}{22} - (100)^2$

$= 10029.09 - 10000$

$= 29.09$

प्रश्न 6. लघु विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

हल

x_i	बारंबारता f_i	माध्य से विचलन $d_i = x_i - A$, $A = 64$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
60	2	−4	16	−8	32
61	1	−3	9	−3	9
62	12	−2	4	−24	48
63	29	−1	1	−29	29
64	25	0	0	00	00
65	12	1	1	12	12
66	10	2	4	20	40
67	4	3	9	12	36
68	5	4	16	20	80
कुल	$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma d_i = 0$		$\Sigma f_i d_i = 0$	$\Sigma f_i d_i^2 = 286$

$$\text{माध्य} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

$$\bar{x} = 64 + \frac{0}{100} = 64$$

$$\text{मानक विचलन } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{286}{100} - \left(\frac{0}{100}\right)^2} = \sqrt{2.86} = 1.69$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 8) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.

वर्ग	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

8.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	5	8	15	16	6

हल (प्र.सं. 7 - 8)

7.

वर्ग	बारंबारता (f_i)	मध्य-बिंदु x_i	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - A}{h}$, $A = 105$, $h = 300$	d_i^2	f_id_i	$f_id_i^2$
0-30	2	15	−3	9	−6	18
30-60	3	45	−2	4	−6	12
60-90	5	75	−1	1	−5	5
90-120	10	105	0	0	0	0
120-150	3	135	1	1	3	3
150-180	5	165	2	4	10	20
180-210	2	195	3	9	6	18
	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_id_i = 2$	$\Sigma f_id_i^2 = 76$

$$\text{माध्य} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h$$

$$= 105 + \frac{2}{30} \times 30 \qquad (\because h = 30)$$

$$= 105 + 2 = 107$$

$$\text{प्रसरण} = \left[\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right)^2\right] \times h^2 = \left[\frac{76}{30} - \left(\frac{2}{30}\right)^2\right] \times (30)^2$$

$$= \left(\frac{76}{30} - \frac{4}{30 \times 30}\right) \times 900 = \left(\frac{76 \times 30 - 4}{900}\right) \times 900$$

$$= \left(\frac{2280 - 4}{900}\right) \times 900 = \frac{2276}{900} \times 900 = 2276$$

8.

वर्ग	बारंबारता f_i	मध्य-बिंदु x_i	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - 25}{10}$	d_i^2	f_id_i	$f_id_i^2$
0-10	5	5	−2	4	−10	20
10-20	8	15	−1	1	−8	8
20-30	15	25	0	0	0	0
30-40	16	35	1	1	16	16
40-50	6	45	2	4	12	24
	$\Sigma f_i = 50$				$\Sigma f d_i = 10$	$\Sigma f d_i^2 = 68$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h = 25 + \frac{10}{50} \times 10$$

$$= 25 + \frac{100}{50} = 25 + 2 = 27$$

$$\text{प्रसरण} = \left[\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right)^2\right] \times h^2$$

$$= \left[\frac{68}{50} - \left(\frac{10}{50}\right)^2\right] \times (10)^2 = \frac{(68 \times 50 - 100)}{50 \times 50} \times 100$$

$$= \frac{(3400 - 100)}{50} \times 2 = \frac{3300 \times 2}{50} = \frac{6600}{50} = 132$$

प्रश्न 9. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	बच्चों की संख्या
70-75	3
75-80	4
80-85	7
85-90	7
90-95	15
95-100	9
100-105	6
105-110	6
110-115	3

हल

वर्ग	बारंबरता f_i	मध्य-बिंदु x_i	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - 92.5}{5}$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
70-75	3	72.5	−4	16	−12	48
75-80	4	77.5	−3	9	−12	36
80-85	7	82.5	−2	4	−14	28
85-90	7	87.5	−1	1	−7	7
90-95	15	92.5	0	0	0	0
95-100	9	97.5	1	1	9	9
100-105	6	102.5	2	4	12	24
105-110	6	107.5	3	9	18	54
110-115	3	112.5	4	16	12	48
	$\Sigma f_i = 60$				$\Sigma f_i d_i = 6$	$\Sigma f_i d_i^2 = 254$

माना कल्पित माध्य $A = 92.5, h = 5$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{\Sigma f d_i}{\Sigma f_i} \times h = 92.5 + \frac{6}{60} \times 5$$

$$= 92.5 + \frac{30}{60} = 92.5 + 0.5 = 93$$

$$\text{प्रसरण} = \left[\frac{\Sigma f d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f d_i}{\Sigma f_i}\right)^2\right] \times h^2$$

$$= \left[\frac{254}{60} - \left(\frac{6}{60}\right)^2\right] \times (5)^2$$

$$= \left[\frac{254 \times 60 - 36}{60 \times 60}\right] \times 25 = \frac{(15240 - 36)}{60 \times 12} \times 5$$

$$= \frac{15204 \times 5}{720} = 105.58$$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{105.58} = 10.27$

प्रश्न 10. एक डिजाइन में बनाए वृत्तों के व्यास (मिमी में) नीचे दिए गए हैं।

व्यास (सेमी में)	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
वृतों की संख्या	15	17	21	22	25

वृतों के व्यासों का मानक विचलन व माध्य व्यास ज्ञात कीजिए।

दिये हुए आँकड़े असतत् है, इसलिए सर्वप्रथम वर्ग-अंतराल को सतत् रूप में बनाकर इसे पूर्ववत् प्रश्न की भाँति ही हल करते हैं

हल

वर्ग	f_i	मध्य बिन्दु (x_i)	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - 42.5}{4}$, $A = 42.5, h = 4$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
32.5 – 36.5	15	34.5	−2	4	−30	60
36.5 – 40.5	17	38.5	−1	1	−17	17
40.5 – 44.5	21	42.5	0	0	0	0
44.5 – 48.5	22	46.5	1	1	22	22
48.5 – 52.5	25	50.5	2	4	50	100
	$\Sigma f_i =$ 100				$\Sigma f d_i =$ 25	$\Sigma f d_i^2 =$ 199

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h = 42.5 + \frac{25}{100} \times 4$$

$$= 42.5 + 1 = 43.5$$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f d_i}{\Sigma f_i}\right)^2} \times h = \sqrt{\frac{199}{100} - \left(\frac{25}{100}\right)^2} \times 4$

$= \sqrt{\frac{199 \times 100 - 625}{100 \times 100}} \times 4 = \frac{4}{100}\sqrt{19900 - 625}$

$= \frac{1}{25} \times \sqrt{19275} = \frac{138.83}{25} = 5.55$

प्रश्नावली 15.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित आँकड़ों से बताइए कि A या B में से किसमें अधिक बिखराव है

अंक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
समूह *A*	9	17	32	33	40	10	9
समूह *B*	10	20	30	25	43	15	7

अधिक विचरण के लिए, हमें विचरण गुणांक ज्ञात करना होता है।

अर्थात् $CV = \frac{\sigma}{x} \times 100$. अधिक विचरण गुणांक वाले समूह में अधिक विखराव होगा।

हल समूह *A* के लिए,

वर्ग	f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
10-20	9	15	−3	9	−27	81
20-30	17	25	−2	4	−34	68
30-40	32	35	−1	1	−32	32
40-50	33	45	0	0	0	0
50-60	40	55	1	1	40	40
60-70	10	65	2	4	20	40
70-80	9	75	3	9	27	81
	$\Sigma f_i = 150$				$\Sigma f d_i = -6$	$\Sigma f d_i^2 = 342$

माध्य $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_i}{\Sigma f_i} \times h = 45 + \frac{(-6)}{150} \times 10 = 45 - \frac{60}{150} = 45 - 0.4 = 44.6$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right)^2} \times h = \sqrt{\frac{342}{150} - \left(-\frac{6}{150}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{\frac{342 \times 150 - 36}{150 \times 150}} \times 10 = \frac{10}{150}\sqrt{51300 - 36}$

$= \frac{1}{15} \times \sqrt{51264} = \frac{226.42}{15} = 15.09$

$\therefore$ समूह A के लिए गुणांक, $A = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{15.09}{44.6} \times 100 = \frac{1509}{44.6} = 33.83$

समूह B के लिए,

वर्ग	f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
10-20	10	15	−3	9	−30	90
20-30	20	25	−2	4	−40	80
30-40	30	35	−1	1	−30	30
40-50	25	45	0	0	00	00
50-60	43	55	1	1	43	43
60-70	15	65	2	4	30	60
70-80	7	75	3	9	21	63
	$\Sigma f_i = 150$				$\Sigma f_i d_i = -6$	$\Sigma f_i d_i^2 = 366$

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h = 45 + \frac{(-6)}{150} \times 10$$

$$= 45 - \frac{60}{150} = 45 - 0.4 = 44.6$$

$$\text{मानक विचलन } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right)^2} \times h$$

$$= \sqrt{\frac{366}{150} - \left(\frac{-6}{150}\right)^2} \times 10 = \sqrt{\frac{366 \times 150 - 36}{150 \times 150}} \times 10$$

$$= \frac{10}{150}\sqrt{54900 - 36}$$

$$= \frac{1}{15} \times \sqrt{54864} = \frac{234.23}{15} = 15.61$$

समूह B का विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{15.61}{44.6} \times 100 = \frac{1561}{44.6} = 35$

चूँकि समूह B का विचरण गुणांक समूह A के विचरण गुणांक से अधिक है। अतः समूह B में समूह A से अधिक बिखराव है।

प्रश्न 2. शेयरों X और Y के नीचे दिए गए मूल्यों से बताइए कि किस के मूल्यों में अधिक स्थिरता है?

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

शेयरों X और Y, के मूल्यों की स्थिरता ज्ञात करने के लिए, विचरण गुणांक की गणना सूत्र $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ द्वारा की जाती है। इनमें से जिसका विचरण गुणांक कम होगा वह उतना ही अधिक स्थिर होगा।

हल

शेयर X के लिए			शेयर Y के लिए		
X	$d_1 = X - A$	d_1^2	Y	$d_2 = Y - A$	d_2^2
35	−17	289	108	3	9
54	2	4	107	2	4
(52) A	0	0	(105) A	0	0
53	1	1	105	0	0
56	4	16	106	1	1
58	6	36	107	2	4
52	0	0	104	−1	1
50	−2	4	103	−2	4
51	−1	1	104	−1	1
49	−3	9	101	−4	16
	$\Sigma d_1 = -10$	$\Sigma d_1^2 = 360$		$\Sigma d_2 = 0$	$\Sigma d_2^2 = 40$

जहाँ, A = कल्पित माध्य

शेयर X के लिए,

माध्य $\bar{X} = A + \frac{\Sigma d_1}{n} = 52 - \frac{10}{10} = 52 - 1 = 51$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_1^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{360}{10} - \left(\frac{-10}{10}\right)^2} = \sqrt{36 - 1}$

$= \sqrt{35} = 5.92$

शेयर X के लिए विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 = \frac{5.92}{51} \times 100 = \frac{592}{51} = 11.60$

शेयर Y के लिए, माध्य $\bar{Y} = A + \frac{\Sigma d_2}{n} = 105 + \frac{0}{10} = 105$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_2^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_2}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{10} - 0} = \sqrt{4} = 2$

शेयर Y, के लिए विचरण गुणांक, $Y = \frac{\sigma}{\bar{Y}} \times 100 = \frac{2}{105} \times 100 = \frac{200}{105} = 1.90$

$\because$ शेयर X का विचरण गुणांक > शेयर Y का विचरण गुणांक

$\therefore$ शेयर Y, शेयर X से अधिक स्थिर होगा।

प्रश्न 3. एक कारखाने की दो फर्मों A और B के कर्मचारियों को दिए मासिक वेतन के विश्लेषण के परिणाम निम्नलिखित है

	फर्म A	फर्म B
वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या	586	648
मासिक वेतनों का माध्य	₹ 5253	₹ 5253
वेतनों के बंटनों का प्रसरण	100	121

(i) A और B में से कौन-सी फर्म अपने कर्मचारियों को वेतन के रूप में अधिक राशि देती है?

(ii) व्यक्तिगत वेतनों में किस फर्म A या B में विचरण अधिक है?

हल फर्म A के लिए,

वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या = 586

मासिक वेतनों का माध्य = $\bar{x}$ = ₹ 5253

फर्म A द्वारा भुगतान की गई राशि = 586 × 5253 = ₹ 3078258 ...(i)

कर्मचारियों के बंटन का प्रसरण = 100

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{100} = 10$

विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{5253} \times 100 = 0.19$ ...(ii)

फर्म B के लिए,

वेतन पाने वाले कर्मचारियों की सख्या = 648

मासिक वेतनों का माध्य = ₹ 5253

फर्म B द्वारा भुगतान की गई राशि = 648 × 5253 = ₹ 3403944 ...(iii)

कर्मचारियों के बंटन का प्रसरण = 121

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{121} = 11$

विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{11}{5253} \times 100 = \frac{1100}{5253} = 0.21$ ...(iv)

समी (i) तथा (ii)से,

फर्म A द्वारा कर्मचारियों को मासिक भुगतान की गई राशि = ₹ 3078258

फर्म B द्वारा कर्मचारियों को मासिक भुगतान की गई राशि = ₹ 3403944

अतः फर्म B अपने कर्मचारियों को वेतन के रूप में अधिक राशि देता है।

समी (ii) तथा (iv) से,

चूँकि फर्म B का विचरण गुणांक फर्म A के विचरण गुणांक से अधिक है, इसलिए व्यक्तिगत वेतनों में फर्म B में अधिक विचरण है।

प्रश्न 4. टीम A द्वारा एक सत्र में खेले गए फुटबॉल मैचों के आँकड़ें नीचे दिए गए हैं

किए गए गोलों की संख्या	0	1	2	3	4
मैचों की संख्या	1	9	7	5	3

टीम B, द्वारा खेले गए मैचों में बनाए गए गोलों का माध्य 2 प्रति मैच और गोलों का मानक विचलन 1.25 था। किस टीम को अधिक संगत (consistent) समझा जाना चाहिए?

हल

किए गए गोलों की संख्या x_i	मैंचों की संख्या f_i	x_i^2	f_ix_i	$f_ix_i^2$
0	1	0	0	0
1	9	1	9	9
2	7	4	14	28
3	5	9	15	45
4	3	16	12	48
	$\Sigma f_i = 25$		$\Sigma f_ix_i = 50$	$\Sigma f_ix_i^2 = 130$

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \frac{50}{25} = 2$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_ix_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i}\right)^2} = \sqrt{\frac{130}{25} - \left(\frac{50}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{130}{25} - 4}$

$= \sqrt{\frac{130 - 100}{25}} = \sqrt{\frac{30}{25}}$

$= \frac{1}{5}\sqrt{30} = \frac{5.48}{5} = 1.096$

टीम A का विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.096}{2} \times 100 = \frac{109.6}{2} = 54.8$

टीम B के लिए,

दिया है, $\bar{x} = 2$ तथा $\sigma = 1.25$

$\therefore$ टीम B का विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.25}{2} \times 100 = \frac{125}{2} = 62.5$

चूँकि टीम A का विचरण गुणांक 54.8 < टीम B का विचरण गुणांक 62.5

अतः टीम A अधिक संगत हैं।

प्रश्न 5. **पचास वनस्पति उत्पादों की लंबाई x (सेमी में) और भार y (ग्राम में) के योग और वर्गों के योग नीचे दिए गए हैं**

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212, \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8$$

और
$$\sum_{i=1}^{50} y_i = 261, \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

लंबाई या भार में किसमें अधिक विचरण है?

हल लंबाई के लिए,

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{212}{50} = 4.24$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{902.8}{50} - \left(\frac{212}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{902.8 \times 50 - (212)^2}{50 \times 50}} = \frac{1}{50}\sqrt{45140 - 44944}$$

$$= \frac{1}{50}\sqrt{196} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} = 0.28$$

∴ लंबाई का विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{0.28}{4.24} \times 100 = 6.604$

भार के लिए,

$$\text{माध्य } \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{261}{50} = 5.22$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1457.6}{50} - \left(\frac{261}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1457.6 \times 50 - (261)^2}{50 \times 50}}$$

$$= \frac{1}{40}\sqrt{72880 - 68121}$$

$$= \frac{1}{50}\sqrt{4759} = \frac{1}{50} \times 68.98 = 1.37$$

∴ भार का विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{y}} \times 100 = \frac{1.37}{5.22} \times 100 = \frac{137}{5.22} = 26.24$

चूँकि भार का विचरण गुणांक (26.24) > लंबाई का विचरण गुणांक (6.6)

इसलिए भार में अधिक विचरण है। .

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. आठ प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 और 9.25, है। यदि इनमें से छः प्रेक्षण 6, 7, 10, 12, 12 और 13 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षण a और b हैं।

दिया है, $\bar{x} = 9$ और $\sigma^2 = 9.25$

∵ $\bar{x} = 9$

$\Rightarrow \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} = 9$

$\Rightarrow$ सभी प्रेक्षणों का योग $= 9 \times 8$

$\Rightarrow 6 + 7 + 10 + 12 + 12 + 13 + a + b = 72$

$\Rightarrow 60 + a + b = 72$

$\Rightarrow a + b = 72 - 60$

$\Rightarrow a + b = 12$ ...(i)

पुनः $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$ या $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$

$\Rightarrow \quad 9.25 = \frac{36 + 49 + 100 + 144 + 144 + 169 + a^2 + b^2}{8} - (9)^2$

$\Rightarrow \quad 9.25 = \frac{642 + a^2 + b^2}{8} - 81$

$\Rightarrow \quad 9.25 + 81 = \frac{642 + a^2 + b^2}{8}$

$\Rightarrow \quad 90.25 \times 8 = 642 + a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 722 - 642$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 80$ ...(ii)

समी (i) से $b = 12 - a$ समी (ii) में रखने पर,

$a^2 + (12 - a)^2 = 80$

$\Rightarrow \quad a^2 + 144 + a^2 - 24a = 80$

$\Rightarrow \quad 2a^2 - 24a + 144 - 80 = 0$

$2a^2 - 24a + 64 = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 - 12a + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 - 8a - 4a + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad a(a - 8) - 4(a - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad (a - 4)(a - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 4$ या $a = 8$

समी (i) से, $b = 8$ या $b = 4$

अतः प्रेक्षण 4 तथा 8 हैं।

प्रश्न 2. सात प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 8 तथा 16 है। यदि इनमें से पाँच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षण a तथा b हैं।

दिया है, $\bar{x} = 8$ और $\sigma^2 = 16$

$\because \quad \bar{x} = 8$

$\Rightarrow \quad \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} = 8$

$\Rightarrow \quad \frac{2 + 4 + 10 + 12 + 14 + a + b}{7} = 8$

$\Rightarrow \quad 42 + a + b = 56$

$\Rightarrow \quad a + b = 14$ ...(i)

पुनः $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$

$\Rightarrow \quad 16 = \frac{4 + 16 + 100 + 144 + 196 + a^2 + b^2}{n} - (8)^2$

$\Rightarrow \quad 16 + 64 = \frac{460 + a^2 + b^2}{7}$

$\Rightarrow \quad 7 \times (80) = 460 + a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 560 - 460$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 100 \quad \ldots\text{(ii)}$

अब, समी (i) से $b = 14 - a$ समी (ii) में रखने पर,

$$a^2 + (14 - a)^2 = 100$$

$\Rightarrow \quad a^2 + 196 + a^2 - 28a = 100$

$\Rightarrow \quad 2a^2 - 28a + 196 - 100 = 0$

$\Rightarrow \quad 2a^2 - 28a + 96 = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 - 14a + 48 = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 - 8a - 6a + 48 = 0$

$\Rightarrow \quad a(a - 8) - 6(a - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad (a - 6)(a - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 6$ या 8

समी (i) से, $\quad b = 8$ या 6

अतः प्रेक्षण 6 तथा 8 है।

प्रश्न 3. छः प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 और 4 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन से गुणा कर दिया जाए, तो परिणामी प्रेक्षणों का माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\bar{x} = 8$, $\sigma^2 = 4$ तथा $n = 6$

माना दिए हुए प्रेक्षण निम्न है, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. तब,

माध्य $\bar{x} = 8$

$$\text{माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 8$$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 48$

अब, यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन से गुणा कर दिया जाए तब माध्य निम्न होगा है।

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 48 \times 3$$

$\Rightarrow \quad \Sigma x_i = 144$

अब, नया माध्य $\bar{x} = \frac{144}{6} = 24$

दिया है $\quad$ प्रसरण $= 4^2$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = 4^2$$

$\Rightarrow \quad \frac{\Sigma x_i^2}{6} - (8)^2 = 4^2$

$\Rightarrow \quad \frac{\Sigma x^2}{6} = 16 + 64$

$\Rightarrow \quad \Sigma x^2 = 80 \times 6$

$\Rightarrow \quad \Sigma x^2 = 480 \quad \ldots\text{(i)}$

अब, नया $\Sigma x^2 = (3x_1)^2 + (3x_2)^2 + (3x_3)^2 + (3x_4)^3 + (3x_5)^2 + (3x_6)^2$

$= 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$

$= 9 \times 480$ [समी (i) से]

$\Rightarrow \quad \Sigma x^2 = 4320$

$\therefore$ नया प्रसरण $= \dfrac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2 = \dfrac{4320}{6} - (24)^2 = 720 - 576 = 144$

$\therefore$ नया मानक विचलन $= \sqrt{\text{नया प्रसरण}} = \sqrt{144} = 12$

नोट *माध्य मूल बिंदु एवं पैमाने में परिवर्तन पर निर्भर करता है। मानक विचलन मूलबिंदु परिवर्तन पर निर्भर नहीं करता परन्तु यह पैमाने में परिवर्तन पर निर्भर करता है।*

प्रश्न 4. **यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ तथा प्रसरण σ^2 है तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, \ldots, ax_n$ का माध्य और प्रसरण क्रमशः $a\bar{x}$ और $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ है।**

हल $ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$ का माध्य $= \dfrac{ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n}{n}$

$= a\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}\right)$

$= a\bar{x} \qquad \left(\because \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$

$ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$ का प्रसरण $= \dfrac{\Sigma(ax_i - a\bar{x})^2}{n}$

$= \dfrac{(ax_1 - a\bar{x})^2 + (ax_2 - a\bar{x})^2 + \ldots + (ax_n - a\bar{x})^2}{n}$

$= \dfrac{[a^2 (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2]}{n}$

$= a^2 \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n} = a^2\sigma^2 \qquad \left[\because \sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}\right]$

प्रश्न 5. **बीस प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 10 तथा 2 है। जाँच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। निम्न में से प्रत्येक का सही माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए यदि**

(i) गलत प्रक्षेण हटा दिया जाए।

(ii) उसे 12 से बदल दिया जाए।

हल (i) दिया है, $\bar{x} = 10$ और $\sigma = 2, n = 20$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\Sigma x_i}{20} = 10$

$\Rightarrow \quad \Sigma x_i = 20 \times 10$

$\Rightarrow \quad \Sigma x_i = 200$

यदि प्रेक्षण 8 हटा दिया जाए, तब

$\Sigma x_i = 200 - 8 = 192$

अब, बचे हुए प्रक्षणों की संख्या $= 19$

$\therefore$ सही माध्य $= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{192}{19} = 10.10$

पुन: $\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{\Sigma x_i^2}{20} - (10)^2 = 4$

$\Rightarrow \Sigma x_i^2 = (4 + 100) \times 20 = 104 \times 20 = 2080$

यदि प्रेक्षण 8 हटा दिया जाए तब

$$\Sigma x_i^2 = 2080 - 64 = 2016$$

अब, सही मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{2016}{19} - \left(\frac{192}{19}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{2016 \times 19 - (192)^2}{19 \times 19}}$$

$$= \frac{1}{19}\sqrt{38304 - 36864}$$

$$= \frac{1}{19}\sqrt{1440} = \frac{37.95}{19} = 1.99$$

(ii) दिया है, $\bar{x} = 10, \sigma = 2, n = 20$

$\Rightarrow \frac{\Sigma x}{20} = 10 \Rightarrow \Sigma x = 200$

यदि प्रेक्षण 8, को 12 से बदल दिया जाए, तब

$$\Sigma x = 200 - 8 + 12 = 192 + 12 = 204$$

सही माध्य $= \frac{204}{20} = \frac{102}{10} = 10.2$

पुन: $\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{\Sigma x^2}{20} - (10)^2 = 4$

$\Rightarrow \Sigma x^2 = 2080$

यदि प्रेक्षण 8, को 12 से बदल दिया जाए, तब

$$\Sigma x^2 = 2080 - (8)^2 + (12)^2$$

$$= 2080 - 64 + 144$$

$$= 2224 - 64$$

$$= 2160$$

अब, सही मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{2160}{20} - \left(\frac{204}{20}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2160 \times 20 - (204)^2}{20 \times 20}} = \frac{1}{20}\sqrt{43200 - 41616}$$

$$= \frac{1}{20}\sqrt{1584} = \frac{39.79}{20} = 1.98$$

प्रश्न 6. एक कक्षा के पचास छात्रों द्वारा तीन विषयों गणित, भौतिक शास्त्र व रसायन शास्त्र मे प्राप्तांकों के माध्य व मानक विचलन नीचे दिए गए हैं

विषय	गणित	भौतिक	रसायन
माध्य	42	32	40.9
मानक विचलन	12	15	20

किस विषय में सबसे अधिक विचलन है तथा किसमें सबसे कम विचलन है?

सबसे अधिक विचलन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम तीनों विषयों का विचरण गुणांक सूत्र $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ द्वारा ज्ञात करते हैं। जिस विषय का विचरण गुणांक सबसे अधिक होगा उसका सबसे अधिक विचलन होगा तथा जिस विषय का विचरण गुणांक सबसे कम होगा उसका विचलन सबसे कम होगा।

हल यहाँ, $n = 50$

गणित के लिए विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{12}{42} \times 100 = \frac{2}{7} \times 100 = \frac{200}{7} = 28.57$ ...(i)

भौतिक के लिए विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{15}{32} \times 100 = \frac{1500}{32} = 46.87$ ...(ii)

रसायन के लिए विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{20}{40.9} \times 100 = \frac{2000}{40.9} = 48.89$ ...(iii)

समी (i), (ii) तथा (iii) से,

रसायन का विचरण गुणांक > भौतिक का विचरण गुणांक > गणित का विचरण गुणांक

अतः रसायन में सबसे अधिक विचलन है तथा गणित में सबसे कम विचलन है।

प्रश्न 7. 100 प्रेक्षणों का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 20 और 3 है। बाद में यह पाया गया कि तीन प्रेक्षण 21, 21 और 18 गलत थे। यदि गलत प्रेक्षणों को हटा दिया जाए, तो माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $n = 100, \bar{x} = 20, \sigma = 3$

$\because \quad \bar{x} = 20$

$\Rightarrow \quad \frac{\Sigma x}{100} = 20$

$\Rightarrow \quad \Sigma x_i = 100 \times 20$

$\Rightarrow \quad \Sigma x = 2000$

यदि गलत प्रेक्षण 21, 21 तथा 18 हटा दिए जाते हैं, तब सही योग निम्न है,

$$\Sigma x_i = 2000 - 21 - 21 - 18 = 2000 - 60$$
$$= 1940$$

शेष 97 प्रेक्षणों का सही माध्य $\bar{x} = \frac{1940}{97} = 20$

पुनः $\sigma = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} = 3 \Rightarrow \frac{\Sigma x_i^2}{100} - (20)^2 = 9$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma x^2}{100} = 9 + 400 = 409 \times 100 = 40900$$

अब, सही Σx^2 निम्न है।

$$\Sigma x^2 = 40900 - (21)^2 - (21)^2 - (18)^2$$
$$= 40900 - 441 - 441 - 324$$
$$= 40900 - 1206 = 39694$$

शेष 97 प्रेक्षणों के लिए सही मानक विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{39694}{97} - \left(\frac{1940}{97}\right)^2} = \sqrt{409.2 - (20)^2}$$
$$= \sqrt{409.2 - 400} = \sqrt{9.2} = 3.03$$